EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

38e JAARGANG 1962/1963

IV — 15 DECEMBER 1962

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

P. WIJDENES 90 JAAR.

Op 22 december 1962 wordt de nestor van de Nederlandse wiskundeleraren, P. Wijdenes, negentig jaar, een heuglijk feit, dat we in ons tijdschrift niet onopgemerkt voorbij kunnen laten gaan in verband met de nauwe relaties die de jubilaris aan Wimecos en en Euclides binden. We wensen hem van harte geluk met deze bijzondere dag en spreken de wens uit, dat deze strijdbare figuur nog tal van jaren over de vitaliteit zal mogen beschikken, die hij tot op zo hoge leeftijd heeft mogen behouden en die hij tot op heden ononderbroken aan de verheffing van het peil van het wiskunde-onderwijs in Nederland dienstbaar heeft weten te maken.

Zowel voor Wimecos, waarvan Wijdenes erelid is, als voor de Redactie van Euclides is er alle aanleiding om aan deze verjaardag bijzondere aandacht te schenken. Wiskundig Nederland heeft namelijk aan de buitengewone werkkracht van de jubilaris en aan de vele initiatieven die hij in zijn vruchtbaar leven heeft ontplooid, zeer veel te danken. Hoewel hiervan reeds bij vorige gelegenheden in Euclides melding is gemaakt, willen we toch enige aspecten ervan terwille van de tegenwoordige lezers van Euclides ook hier belichten.

In 1913 richtte Wijdenes samen met H. G. A. Verkaart het „Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde" op. Het zou spoedig de „Vriend der Wiskunde" verdringen; van dit tot in de eerste jaren van de 20e eeuw populaire tijdschrift verscheen in 1914 de 29e en laatste jaargang. Terwijl echter de Vriend der Wiskunde zich uitsluitend had bewogen op het niveau van de akte wiskunde-L.O. hield het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde van meet af aan niet alleen rekening met deze categorie van abonnees maar tevens met die van hen die zich voorbereidden voor de akte Wiskunde-M.O., die eertijds bekend stond als K 1. De redacteuren wisten zich van de medewerking van tal van bewame wiskundigen te verzekeren, waardoor de verschijning van het nieuwe tijdschrift een onmiskenbare niveau-verhoging betekende in vergelijking met zijn voorganger. Talloze leraren in de wiskunde in Nederland hebben hun vaardigheid in het oplossen van vraagstukken mede te danken aan de bekende series van ongeveer 16 vraagstukken die regelmatig in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde werden opgenomen. Dat dit tijdschrift zich 50 jaar lang onbedreigd heeft kunnen handhaven, pleit voor zijn hoge kwaliteiten. Dat Wijdenes als een der oprichters het halve

eeuwfeest van een tijdschrift, dat hij op veertigjarige leeftijd hielp tot stand brengen en waaraan hij al die jaren door een deel van zijn beste krachten bleef wijden, mag beleven, is wel een uniek gebeuren.

Met J. H. Schogt nam Wijdenes in de twintiger jaren een ander belangrijk initiatief. Hij gaf een „didactisch bijvoegsel" uit op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, en hieruit zou enige jaren later „Euclides" ontstaan. De naam die dit eerste Nederlandse tijdschrift gewijd aan de didactiek der exacte vakken kreeg, verraadt ons iets over het didactische klimaat van een kwart eeuw geleden. Toen was er een tendens naar Euclides toe, zoals bijvoorbeeld ook blijkt uit de verschijning van Schogt's befaamde leerboek, thans beweegt zich de ontwikkeling van de schoolmeetkunde eer van Euclides af. De 37 jaargangen van „Euclides" blijven een onschatbare informatiebron voor allen die zich voor de ontwikkeling van de didactiek der wiskunde in Nederland in de twintigste eeuw interesseren. De tegenwoordige redactie van „Euclides" is Wijdenes dankbaar voor alles wat hij heeft gedaan voor de totstandkoming en voor de instandhouding van dit tijdschrift en verheugt zich erover dat Wijdenes kort geleden opnieuw als „medewerker" tot het tijdschrift heeft willen toetreden; dit betekende, zoals uit de jongste jaargang blijkt, tevens als „actief medewerker".

Velen in Nederland zullen Wijdenes dankbaar zijn voor zijn aandeel in de totstandkoming van „Noordhoff's verzameling van Wiskundige Werken", een serie die menig leraar heeft geholpen om te voorkomen dat hij zou gaan „afzakken tot het peil van zijn hoogste klasse", een gevaar dat iedere leraar, geheel geabsorbeerd door zijn maatschappelijke taak, als dreiging boven het hoofd hangt. Met deze serie uitgaven begon voor de aanstaande Nederlandse wiskunde-leraar een periode waarin hij niet meer uitsluitend of althans grotendeels aangewezen was op buitenlandse studiewerken bij de voorbereiding voor middelbare examens.

Groot is het aantal wiskundeleraren in Nederland dat door Wijdenes is opgeleid voor diverse examens, via privélessen, mondelinge cursussen, schriftelijke cursussen. Talloos is voorts het aantal leerlingen van Nederlandse scholen voor wie de begrippen „wiskunde" en „Wijdenes" innig geassocieerd zijn. Het moet al heel lang geleden zijn dat het aantal exemplaren van schoolboeken van de hand van Wijdenes voor het eerst met een getal van zeven cijfers (in het tientallig stelsel) moest worden geschreven.

Vijftien jaar geleden stond er in een van de Nederlandse onderwijsbladen een artikel waaruit we citeren: „Bij de vele gelukwensen die de nog krasse en volijverige 75-jarige mathematicus dezer dagen

heeft ontvangen, wil onze Redactie gaarne de hare voegen".

We kunnen na het getal 75 door 90 te hebben vervangen ons hierbij aansluiten. Mogen aan Wijdenes nog vele jaren van actief medeleven in het wiskunde-onderwijs in Nederland worden geschonken!

Namens het Bestuur van Wimecos:
B. Groeneveld,

Namens de Redactie van Euclides:
Joh. H. Wansink.

Dr. P. M. van HIELE, LID VAN DE REDACTIE VAN EUCLIDES

Met ingang van dit nummer zal Euclides niet alleen officieel orgaan zijn van Wimecos en Liwenagel, maar tevens van de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.

We verheugen ons over de nauwere samenwerking die hierdoor tussen de drie instanties, die alle de belangen van het wiskundeonderwijs in het v.h.m.o. behartigen, mogelijk wordt.

Wie vorige jaargangen van Euclides doorbladert, zal ontdekken, hoe dikwijls er reeds artikelen zijn geplaatst die verband houden met de activiteiten van de Werkgroep. We denken daarbij in de eerste plaats aan de verslagen van de herfstconferenties van de werkgroep en aan de bijdragen van de Heer en Mevrouw Van Hiele. Bij het zilveren feest van de Wiskundewerkgroep in 1961 heeft de voorzitter van Wimecos de betekenis van het werk van de groep voor geheel ons onderwijs in de wiskunde geschetst in een bijdrage waarnaar we hierbij verwijzen (Jrg. 36, p. 239—240).

We heten Dr. Van Hiele, die door het Bestuur van de Werkgroep als redacteur is aangewezen, welkom in ons midden en spreken de wens uit dat de nieuwe fase in het bestaan van Euclides de gunstige ontwikkeling van de didactiek in Nederland zal bevorderen.

Namens de Redactie:
Joh. H. Wansink.

INTERNATIONAAL MATHEMATISCH CONGRES STOCKHOLM

15—22 augustus 1962

Par. 1.

Het Internationaal Mathematisch Congres, dat van 15 tot 22 augustus 1962 in het Institute of Technology te Stockholm werd gehouden, was, zoals de Stockholmse bladen op 15 augustus met trots vermeldden, het grootste congres dat Stockholm ooit binnen zijn muren had geherbergd. Het was tevens het grootste in de rij der internationale mathematische congressen, die, behoudens onderbrekingen wegens de eerste en tweede wereldoorlog, sinds 1896 om de vier jaren worden gehouden. Dank zij de voortreffelijke organisatie door de Zweden werd het tot een groot succes.

Uit de ter beschikking gestelde ledenlijst blijkt, dat het aantal „ordinary members" van het congres minstens 2340 heeft bedragen, terwijl het aantal „associate members" de duizend verre heeft overschreden.

Het aantal „ordinary members" uit Nederland bedroeg 85.

Er waren 59 landen vertegenwoordigd, waarvan de USA het grootste aantal deelnemers aan het congres leverde (615), gevolgd door Engeland met 302, West-Duitsland met 155, Zweden met 116. Uit de USSR was het aantal inschrijvingen 50, waaronder enige wiskundigen van internationale faam. Toch was het aantal Russen, op het congres aanwezig, relatief klein. In een der bulletins, die tijdens het congres werden uitgegeven, lazen we dat een aantal korte voordrachten die waren aangekondigd zou moeten vervallen: hieronder waren 32 voordrachten van Russische wiskundigen.

Beschermheer van het congres was Koning Gustaaf VI van Zweden. Deze tachtigjarige vorst was op de openingsplechtigheid, die woensdagmorgen 15 augustus in Konserthuset werd gehouden, aanwezig, en reikte er de Fields Medals uit aan twee jonge geleerden Lars Hörmander (Zweden) en John Milner (USA) voor hun onderzoekingen op het gebied resp. van de differentiaalvergelijkingen en van de topologie. De betekenis van het werk van deze geleerden werd uiteengezet in twee korte voordrachten, die in onmiddellijke aansluiting aan de openingsplechtigheid werden gehouden.

Par. 2.

Voor het houden van voordrachten van een vol uur waren zestien wiskundigen van internationale bekendheid uitgenodigd, voor het houden van voordrachten van een half uur over onderwerpen van een minder algemeen karakter, ongeveer 60; hierbij waren geen Nederlanders. Gewone leden hadden het recht zich op te geven voor het houden van een korte voordracht, waarvoor met eventuele discussie op de rooster een kwartier kon worden uitgetrokken.

De voordrachten van een half uur en die van een kwartier waren verdeeld over de volgende secties:

I. Logic, foundations and history.
II. Algebra and theory of numbers.
III. Analysis.
IV. Topology and differential geometry.
V. Algebraic geometry.
VI. Probability and statistics.
VII. Applied mathematics, mathematical physics and numerical analysis.
VIII. Education.

Congrestalen waren Engels, Frans, Duits en Russisch. Van de Russische voordrachten was ten gerieve van de deelnemers aan het congres een Engelse vertaling beschikbaar.

Sectie VIII (Education) onderscheidde zich van de overige secties, doordat hier uitnodigingen tot het houden van grote voordrachten niet door het Congresbestuur waren verzonden. In plaats daarvan kreeg de C.I.E.M. (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique) de beschikking over twee gehele middagzittingen en één morgenzitting voor het houden van inleidingen over de onderwerpen die in de periode 1958—1962 op het werkprogramma van deze internationale commissie hadden gestaan.

De banden tussen de C.I.E.M. en de internationale mathematische congressen zijn zeer nauw.

In de sectie „onderwijs" van het vierde internationale mathematische congres te Rome in 1908 werd het besluit genomen tot de oprichting van een internationale onderwijscommissie dit tot taak zou hebben een onderzoek in te stellen naar, en rapporten uit te brengen over de onderwijsmethoden en de onderwijsprogramma's in de verschillende landen. Onder de bezielende leiding van Felix Klein is er in de jaren voor de eerste wereldoorlog zeer veel werk verzet en werden er op de congressen van 1908 en 1912 belangrijke rapporten uitgebracht. Reeds in deze eerste jaren is er van Neder-

landse zijde meegewerkt op internationaal niveau. De eerste Nederlandse subcommissie stond onder leiding van Prof. Cardinaal uit Delft. Tot de leden behoorden o.a. Dr. Campert, inspecteur van het middelbaar onderwijs, en Dr. Vinkesteijn, inspecteur der gymnasia.

We vermelden het lidmaatschap van Dr. Vinkesteijn in het bijzonder, omdat hierin een der aanleidingen kan worden gevonden voor moderniseringen van het gymnasiale leerplan voor wiskunde in 1919, waar, 18 jaar eerder dan op de hogereburgerschool, de infinitesimaalrekening in de leerstof voor de B-richtingen werd opgenomen. Na de eerste wereldoorlog ging het contact van Nederland met de Internationale Onderwijscommissie echter verloren.

In 1952 besloot de International Mathematical Union te Rome om de Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, die sinds het Internationaal Mathematisch Congres van 1936 te Oslo niets van zich had laten horen, weer in het leven te roepen. Dit werd het begin van een nieuwe periode van grote activiteit op internationaal niveau. De eerste symptomen ervan waren te bespeuren op het Internationaal Mathematisch Congres te Amsterdam in 1954 waar ook de eerste rapporten van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde konden worden ingediend, nl.:

I. The function of mathematics in modern society and its consequence for the teaching of mathematics (rapporteur Prof. Dr. D. van Dantzig).
II. The teaching of mathematics to students between 16 and 21 years of age in the Netherlands (rapporteur Dr. L. N. H. Bunt).

Terwijl in de jaren tussen de twee wereldoorlogen de samenwerking tussen de internationale Mathematische Congressen en de internationale Onderwijscommissie vaak gebrekkig was, laat deze sinds 1954 niets te wensen over en wordt op de internationale congressen een groot deel van de beschikbare tijd voor de Onderwijscommissie gereserveerd. Een gunstig symptoom is voorts dat de sectie, waarin oorspronkelijk „philosophie, histoire et enseignement" waren samengebracht, thans alleen aan „education" is gewijd.

Par. 3.

Op het Congres te Stockholm werden onder leiding van de Internationale Onderwijscommissie in sectie VIII de volgende grote voordrachten gehouden:

a) Which subjects in modern mathematics and which applications of modern mathematics can find place in programs of secondary school instruction?
Rapporteur: Prof. Dr. J. G. Kemeny, Dartmouth College, New Hampshire, U.S.A.

b) Connections between arithmetic and algebra in the mathematical instruction of children up to the age of 15.
Rapporteur: Prof. Dr. S. Straszewicz, Warschau, Polen.

c) Education of the teachers for the various levels of mathematical instruction.
Rapporteur: Dr. Kay Piene, Oslo, Noorwegen.

De belangstelling voor deze voordrachten was buitengewoon groot; bij de eerste waren meer dan 300 deelnemers aanwezig, bij de tweede en de derde was dit aantal beide keren boven de 200.

Van de gelegenheid tot gedachtenwisseling werd een ruim gebruik gemaakt.

Het is de bedoeling dat deze drie voordrachten, behalve in het internationale tijdschrift „l'Enseignement Mathématique", ook in „Euclides" zullen worden opgenomen.

In de volgende paragrafen wordt van elk der voordrachten een overzicht gegeven.

Door de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde was over elk der drie onderwerpen een rapport opgesteld, dat voor het congres aan de genoemde rapporteurs was toegezonden.

De rapporteurs van deze Nederlandse rapporten waren:

a) Prof. Dr. F. Loonstra en Dr. P. G. J. Vredenduin (met drie medewerkers[1]);

b) Prof. Dr. H. Freudenthal (met zes medewerkers[2]);

c) Dr. L. N. H. Bunt (met vier medewerkers[3]).

Deze rapporten zijn resp. als publikaties VI, V en VII van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde bij de firma Wolters uitgegeven.[4]).

Par. 4.

Aan het rapport van J. G. Kemeny over het thema „*Which subjects in modern mathematics and which applications of modern mathe-*

[1]) Drs. A. Th. J. Maassen, Dr. C. P. S. van Oosten en Dr. L. N. H. Bunt.

[2]) Dr. W. J. Bos, Drs. W. J. Brandenburg, Dr. P. M. van Hiele, Dr. H. Streefkerk, Dr. P. G. J. Vredenduin en Dr Joh. H. Wansink.

[3]) Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis, Dr. D. N. van der Neut, Dr. P. G. J. Vredenduin en Dr. Joh. H. Wansink.

[4]) De rapporten zijn aan alle gymnasia en hogereburgerscholen toegezonden.

matics can find place in programs of secondary school instruction?" lagen de nationale rapporten van 21 verschillende landen ten grondslag. Het bleek dat in vrijwel al deze landen het probleem van de modernisering van het wiskunde-onderwijs in de volle belangstelling stond. Wat tempo en kwaliteit van de herzieningen betreft staat Frankrijk vooraan. Dit wordt mogelijk gemaakt door het hoge wetenschappelijke niveau van de Franse wiskundeleraar. In de Scandinavische landen en in Nederland zijn Staatscommissies ingesteld ter bestudering van de modernisering van het wiskunde-onderwijs. Kemeny constateert, dat een volledige hervorming van het wiskunde-onderwijs in moderne zin minstens een generatie in beslag zal nemen en dat op het moment van de voltooiïng de behoefte aan een nieuw „modern programma" zich alweer sterk zal doen gevoelen. Zo wordt het probleem van de aanpassing van het wiskunde-onderwijs aan moderne inzichten en behoeften tot een probleem van permanente zorg der verantwoordelijke instanties.

Het is opvallend dat er in de diverse landen een zo grote gelijksoortigheid bestaat ten aanzien van de voorstellen tot behandeling van nieuwe onderwerpen. Elementaire verzamelingsleer, inleiding tot de logica, bepaalde onderwerpen uit de moderne algebra, inleiding tot de waarschijnlijkheidsleer en statistiek komen algemeen voor. Een viertal landen beveelt bovendien een inleiding tot de topologie aan. Bij herhaling wordt erop gewezen, dat het noodzakelijk is de taal der wiskunde en de structuur van de schoolwiskunde aan te passen aan moderne inzichten.

Duitsland neemt een leidende plaats in door de vele publikaties die er op grond van gedane experimenten zijn verschenen. Het rapport noemt dertig titels die voor allen die zich met het probleem der modernisering bezig houden van belang zijn. Uitdrukkelijk wordt gewezen op de relatie die er bestaat tussen de modernisering van het onderwijs en de opleiding der leraren. Tekorten in de opleiding van de leraren vergroten de afstand tussen de schoolwiskunde en de moderne wiskunde onnodig. Kemeny wijst erop dat het van cultureel standpunt als een misdaad is te beschouwen dat 150 jaar na de ontdekking der niet-euclidische meetkunde het gros der leerlingen van middelbare scholen en naar gevreesd mag worden ook nog een deel der leraren niet op de hoogte is van het bestaan van niet-euclidische meetkunden. De constatering dat ons heelal slechts bij benadering euclidisch van structuur is, terwijl het in het klein en in het groot adekwaat niet-euclidisch kan worden beschreven, is een feit, dat vele pedagogen met schrik plegen te vernemen.

Kemeny vestigt er de aandacht op, dat de toegepaste wiskunde

nog volstrekt niet de belangstelling geniet die ze verdient en dat ze nog nauwelijks tot de hervorming van het wiskunde-onderwijs heeft bijgedragen. „The philosophy of teaching applied mathematics is particularly well described in the report from the Netherlands", aldus Kemeny, die dit oordeel toelicht met een uitvoerig citaat uit het Nederlandse rapport, waarin wordt uiteengezet dat het onderwijs in toegepaste wiskunde denkgewoonten ontwikkelt die wezenlijk verschillen van die der abstracte wiskunde.

Aan het eind van zijn rapport beveelt Kemeny de volgende problemen aan de C.I.E.M. ter bestudering aan in de periode van vier jaren voor het Internationaal Mathematisch Congres van 1966:

1) Hoe kan het onderwijs in de toepassingen der wiskunde in ons middelbaar onderwijs worden gemoderniseerd? Dit probleem is tot dusver nog nauwelijks onder ogen gezien.
2) In hoeverre is axiomatisering van de wiskunde in het middelbaar onderwijs mogelijk? Ten aanzien van dit probleem lopen de meningen in diverse landen sterk uiteen.
3) Op welke wijze en tot welke omvang is onderwijs in waarschijnlijkheidsrekening op de middelbare school mogelijk?
   Dit is weliswaar het onderwerp dat het vaakst in de diverse nationale rapporten werd aanbevolen, maar tal van vragen van pedagogisch-didaktisch karakter dienen nog beantwoord te worden.

Verder beveelt Kemeny aan dat de C.I.E.M. zal optreden als een bemiddelingsinstantie voor het doorgeven van alle ideeën en bereikte resultaten op het terrein van de modernisering van de schoolwiskunde. Boeken, artikelen, experimenteel materiaal, dienen aan de C.I.E.M. opgezonden te worden, die het kan verzamelen, ordenen en doorgeven. Op deze wijze zal er een planmatige voorlichting tot stand kunnen komen, waardoor onnodig dubbel werk wordt voorkomen.

Aan de uitvoerige discussie werd door meer dan twaalf vertegenwoordigers van verschillende landen deelgenomen.

We stippen enige punten uit deze discussie aan:

a) De betekenis van de wiskunde in het algemeen en van de toegepaste wiskunde in het bijzonder voor de aanstaande wiskundigen en voor de niet-mathematische beroepen (Kalmár, Hongarije).
b) De afzonderlijke positie van waarschijnlijkheidsrekening en statistiek wordt uiteengezet en voor het onderwijs wordt er de voorkeur aan gegeven met statistiek te beginnen (Kurepa, Yoegoslavië).

c) Kay Piene (Noorwegen) wijst erop, dat het gevaarlijk is zuivere en toegepaste wiskunde te zeer te scheiden: in het onderwijs dienen toepassingen van de wiskunde bij àlle onderwerpen uit de wiskunde gemaakt te worden.
d) De vraag komt aan de orde òf en in hoever in het middelbaar onderwijs de behoeften van het universitair onderwijs moeten domineren (Zaremba, Engeland).
e) Voor het met vrucht discussiëren over modernisering is het noodzakelijk over een syllabus te beschikken; om over een syllabus te kunnen discussiëren is het gewenst een leerboek te hebben waarin staat aangegeven, hoe men zich de uitwerking denkt; zeer veel varianten van onderwijs zijn mogelijk bij eenzelfde theoretische formulering van het uitgangspunt en van de doelstelling (Morse, V.S.).
f) Van belang voor het onderwijs, in het bijzonder bij zgn. moderne onderwerpen, is het geven van een goede motivatie voor de aan te bieden leerstof. Het moet de leerlingen duidelijk zijn, waarom en waartoe ze de nieuwe onderwerpen te bestuderen krijgen (Maschler, Israël).
g) De noodzakelijkheid het te bereiken eindniveau voor de begaafde leerlingen hoger te leggen wordt onderstreept (Van der Neut, Nederland).
h) Er wordt gewezen op het opmerkelijke feit dat de belangstelling voor toegepaste wiskunde bij grote groepen van beoefenaars der zuivere wiskunde ontbreekt (Forbat, België). Deze poneert als definitie van toegepaste wiskunde „schématisation d'une situation réelle".

Par. 5.

Het tweede onderwerp: „*Connections between arithmetic and algebra in the mathematical instruction of children up to the age of 15*" werd ingeleid door Prof. Dr. S. Straszewicz uit Warschau (Polen).

Aan zijn samenvattend rapport lagen de rapporten van elf verschillende landen ten grondslag. Hoewel de probleemstelling betrekking had op de eerste 8 of 9 schooljaren (6 of 7 lagere school, en 2 of 3, soms 4 middelbare school) lag het accent begrijpelijkerwijze op de middelbare school en kwamen de didactische problemen van de lagere school nauwelijks ter sprake.

Spr. constateerde dat in alle rapporterende landen een stijgende, actieve belangstelling valt waar te nemen voor de herziening van de leerprogramma's, voor de verbetering van de methoden van onder-

wijs en voor de totstandkoming van betere schoolboeken. Uit de rapporten blijkt voorts, hoezeer diepte en breedte van behandeling in de diverse landen nog uiteenlopen.

Spr. gaf een uitvoerige karakterisering van de verschillende rapporten en liet vervolgens zien, welke opvattingen er heersen ten aanzien van de behandeling van de volgende onderwerpen:

a) het gebruik van letters;
b) de behandeling van de vergelijkingen;
c) verzamelingenleer;
d) functies en relaties;
e) de ontwikkeling van het getalbegrip.

Hij wijst erop, dat bevredigende informatie ten aanzien van de vraag, of leerlingen in moderne zin in het praktisch rekenen geschoold, voldoende bekwaam zijn, misschien nog niet aanwezig is. Over de eigenlijke schoolervaring die ons tot een kritische waardering van oude en nieuwe methoden in staat zou stellen, is nog te weinig bekend. Sprekers mening is echter, dat door begrip en inzicht op moderne wijze aan te brengen de noodzakelijke vaardigheden op meer economische wijze verkregen zullen worden dan langs de conventionele weg.

Par. 6.

Het derde onderwerp: „*Education of the teachers for the various levels of mathematical instruction*" werd ingeleid door Dr. Kay Piene, Oslo (Noorwegen).

Spr. beschouwt het niet zozeer als zijn taak om te rapporteren, hoe de opleiding van de wiskundeleraren op dit moment in feite is, maar eerder om aan te geven, hoe die opleiding dient te worden. Hij maakt voor zijn betoog gebruik van de nationale rapporten van twaalf landen en van de publikaties van het internationale lerarencongres van WCOTP en FIPESO, dat eveneens in de zomer van 1962 in Stockholm werd gehouden.

We stippen enige punten uit het gegeven betoog aan.

In verband met de verschuiving van leerstof aanvankelijk bestemd voor latere leeftijden en hogere niveaus naar vroegere leeftijden en lagere niveaus is het in toenemende mate gewenst, dat ook de onderwijzer van de lagere school voldoende wiskunde leert. De opleiding zoals deze in Denemarken bestaat wordt in dit verband ten voorbeeld gesteld. Bij deze opleiding is het mogelijk, dat de onderwijzer de wiskunde als keuzevak kiest. Hij heeft dan dit onderwerp te bestuderen in een omvang gelijk aan die voor het middelbaar onderwijs, waaraan dan wordt toegevoegd een verdieping door

middel van o.a. logica en verzamelingenleer, benevens een extra behandeling van enige onderwerpen die tot het leerplan van de lagere school gerekend kunnen worden.

Voor het middelbaar onderwijs onderscheidt Kay Piene drie niveaus:

a) de onderbouw van het middelbaar onderwijs;
b) de bovenbouw voor de mathematische richtingen;
c) de bovenbouw voor de niet-mathematische richtingen.

De eisen aan de opleiding tot leraar in de wiskunde te stellen zijn volgens spr.:

a) aan de opleiding van de wiskundeleraar moet een bevredigende algemene vorming ten grondslag liggen;
b) een grondige vakwetenschappelijke opleiding op het gebied van de wiskunde is onontbeerlijk;
c) op deze wiskundige vorming dient een specifieke beroepsopleiding te volgen;
d) de specialisatie dient niet zover te worden doorgezet, dat een wiskundeleraar niet nog een ander vak zou kunnen onderwijzen.

Onbeslist acht spr. voorlopig nog de vraag, of de volledige leraarsopleiding aan de universiteit dient te worden toevertrouwd, dan wel of de pedagogisch-didactische opleiding aan afzonderlijke instituten (seminaria) dient plaats te hebben. Hij wijst op de noodzakelijkheid, dat op alle niveaus van onderwijs de leraar de structuur van de wiskunde moet beheersen en dat hij op de hoogte moet zijn van de historische ontwikkeling van het vak, voor zover het in relatie staat tot het door hem te geven onderwijs.

Kay Piene somt op, welke onderwerpen uit de wiskunde door de docent op universitair niveau dienen te worden bestudeerd, gespecificeerd voor de verschillende schooltypen.

Als hedendaagse specifieke moeilijkheden voor de leraarsopleiding komen ter sprake:

a) het nijpende lerarentekort, een internationaal verschijnsel;
b) de scherpe concurrentie tengevolge van de moderne automatisering en van de behoeften in de industrie;
c) de eisen gesteld aan de modernisering van de schoolprogramma's.

De nascholing van de in functie zijnde leraar wordt geschetst als een der pijnlijkste problemen, een probleem dat slechts zal kunnen worden opgelost door een passende samenwerking van leraren, leraren-organisaties en autoriteiten. Op dit ogenblik volgen 50 % van de Deense wiskundeleraren een veertiendaagse vakantiecursus in de moderne wiskunde. Spr. citeert de uitspraak: „ A university

training which is 20 years old is too old if it is not supplemented and renewed".

Na het program voor de speciale beroepsopleiding te hebben nagegaan, constateert Kay Piene, dat een vol jaar voor deze studie nodig en voldoende is.

Naast de besproken objectieve eisen zijn er ook enige die meer in het persoonlijke vlak liggen. Een goed leraar moet grote belangstelling hebben voor zijn leerlingen, hij moet hen begrijpen en kunnen leiden. „We need mathematics teachers who are open, free and understanding, who are not afraid of the textbooks of their students".

De werkelijk „geboren leraren", die in hun ambt slagen zonder op verantwoorde wijze te profiteren van de ervaringen van anderen, zijn dun gezaaid.

Kay Piene eindigde zijn betoog met te wijzen op de taak die de C.I.E.M. heeft bij de totstandkoming van goed ingerichte „refresher courses".

Par. 7.

Van de ongeveer 800 korte voordrachten die er in de diverse secties van het Congres gehouden zouden worden, vielen er 18 in de sectie „Education". Ook voor deze voordrachten bestond een opvallend grote belangstelling, in het bijzonder voor de lezingen die betrekking hadden op de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs, dat blijkbaar als een internationaal probleem van de eerste orde wordt gezien.

Van enkele voordrachten laten we hier een korte karakterisering volgen.

a) Howard F. Fehr (U.S.A.) sprak over „*Instruction in geometry for the secondary school*". Na een historisch overzicht, waarin de ontdekking der niet-euclidische meetkunden, de axiomatisering van de euclidische meetkunde, het programma van Felix Klein inzake de meetkunde als invariantentheorie van transformatiegroepen aan de orde kwamen, kwam de spreker tot de conclusie, dat de euclidische behandelingswijze der meetkunde beperkt dient te blijven tot een niet-deductieve behandeling in de onderbouw van onze scholen en dat in de bovenbouw plaats gemaakt dient te worden voor de meetkunde der vector-ruimten. Deze voordracht zal in „Euclides" verschijnen.

b) W. W. Sawyer (U.S.A.) die internationale bekendheid verwierf door zijn populariseringen van de wiskunde (Prelude to mathematics, Mathematician's delight) sprak over „*Not modern; not traditional; but mathematics as a whole*". Te vaak meent men aan

moderne wiskunde te doen alleen door over interessante problemen enkele mededelingen te doen. Al is de historische achtergrond noodzakelijk voor een juiste waardering der problemen, betekenis krijgt een en ander ook voor de leerlingen eerst door de wiskundige behandeling ervan. De strekking van Sawyer's betoog was om te laten zien dat bij een adekwate behandeling van onvervalst moderne onderwerpen succes mogelijk is.

c) Kl. Wigand (Duitsland) sprak over *„Modernisierung des Mathematikunterrichts durch mathematische Geräte und praktische Verfahren"*. Deze spreker is in Nederland bekend door zijn voordracht op de jongste jaarvergadering van Wimecos en door zijn aandeel in de totstandkoming van het „Handbuch der Schulmathematik" van G. Wolff. Hij wees erop, dat in de laatste tijd een tendens is waar te nemen tot geringschatting van het praktische rekenen en construeren. Deze verwaarlozing, die met behulp van moderne instrumenten (rekenmachines, rekenlinialen, tekenapparaten, enz.) kan worden bestreden, is tevens een bedreiging voor het overige wiskunde-onderwijs, dat juist van de concrete hulpmiddelen een sterke steun kan ontvangen.

d) Boeiend was het korte betoog van M. Maschler (Israël) over *„Mathematics curriculum for humanistic studies"*.

De spreker combineert in zijn land de functie van universiteitsprofessor met die van leider van een experimentele club van middelbare scholieren. Hij liet zien wat er met een gemiddelde schoolklasse te bereiken valt bij onderwerpen als: axioma's van Peano, rationale en reële getallen, differentiaal- en integraalrekening, limietbegrip.

e) Dr. Bunt (Nederland), die op een der ochtendzittingen het voorzitterschap van de sectie waarnam, sprak over: *„Statistics in schools; basic notions for tasting a hypothesis"*. Aan de hand van zeer eenvoudige voorbeelden liet spr. zien dat de volgende fundamentele begrippen kunnen worden aangebracht: toets van een hypothese, beslissingsvoorschrift, fout van de eerste of tweede soort, werkingsfunctie, tekentoets, betrouwbaarheidsgebied.

Ook deze voordracht zal in „Euclides" verschijnen.

f) We noemen nog de volgende titels:

1) E. M. R. Smith, *The challenge and opportunities of mathematics teaching in Africa.*
2) F. S. Acton, *The growing importance of mathematical models in medical research.*
3) C. Orloff, *Concrétisation des notions algébriques dans l' enseignement secondaire.*
4) P. Suppes, *The learning of mathematical concepts.*
5) B. Thwaites, *An experiment in new syllabuses.*

Par. 8.

Evenals bij de internationale congressen in Edinburg en Amsterdam waren er twee grote boekententoonstellingen. Doordat beide in het hoofdgebouw zelf waren ondergebracht, werd het bezoek eraan zeer gemakkelijk gemaakt, wat aan het nuttig effect van beide tentoonstellingen ten goede is gekomen.

De vakwetenschappelijke werken op wiskundig gebied waren uitgestald op de tweede etage, de didactische op de derde. Slechts een klein deel van het materiaal was bekend van de vorige exposities tė Amsterdam (1954) en te Edinburg (1958). De tentoonstelling van thans was bedoeld voor de uitgaven die in de periode 1958—1962 waren verschenen of althans in deze periode waren herdrukt.

Blijkens de inzendingen is de belangstelling in het bijzonder uitgegaan naar de volgende uitgaven:

a) werken over moderne wiskunde, zowel voor het v.h.m.o. als voor universiteit en hogeschool;
b) werken van didactische aard voor leraren en aanstaande leraren;
c) werken die betrekking hebben op het onderwijs in rekenen en algebra aan leerlingen van hoogstens 15 jaar;
d) tijdschriften, brochures, artikelen betrekking hebbende op het wiskunde-onderwijs.

De organisatie voor de Nederlandse afdeling van de didactische tentoonstelling berustte bij ondergetekenden.

Van Nederlandse zijde werd door een elftal uitgevers aan deze tentoonstelling meegewerkt. Er waren vier tafels voor de Nederlandse afdeling beschikbaar. Niet alleen de schoolboeken, maar ook de uitgaven van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde (rapporten I—VII) en het Wiskundetijdschrift voor jongeren „Pythagoras", genoten een grote belangstelling bij de bezoekers.

De achterstand van Nederland op het gebied van uitgaven die de moderne wiskunde betreffen, werd sterk gevoeld. Vooral de voorsprong van Duitsland, Frankrijk en de Verenigde Staten was onmiskenbaar.

Ten slotte vermelden we nog, dat er op de eerste avond een aantal fraaie en boeiende wiskundige films voor een groot aantal belangstellenden werd vertoond. De inhoud was o.a. ontleend aan leerstof over:

a) de transformaties $w = z + \frac{1}{z}$.
b) exponentiële functies

c) het construeren van hyperbolen;
d) four-lined conics.

Ondanks het feit dat deze films goed van structuur en technisch van hoge kwaliteit waren, hebben ze naar onze mening voor het Nederlandse onderwijs geen directe waarde; bij ons is er een dringende behoefte aan films die aansluiten bij het Nederlandse schoolprogramma, die hierin althans kunnen worden ingepast. Wat ons getoond werd heeft ons verlangen naar een Nederlands initiatief op het gebied van wiskundefilms (filmstrips laten we in dit verband uiteraard buiten beschouwing) wel sterk doen toenemen.

L. N. H. Bunt,
D. N. van der Neut,
Joh. H. Wansink.

VERSLAG VAN HET INTERNATIONALE SYMPOSIUM „SUR L'ENSEIGNEMENT SCOLAIRE DES MATHÉMATIQUES" VAN DE UNESCO.

Door de Nationale Hongaarse Unescocommissie en het Hongaarse Ministerie van Cultuur met medewerking van het wiskundig genootschap „Bolyai János" en met de steun van de UNESCO is een internationaal symposium georganiseerd met als discussieonderwerp: l'enseignement scolaire des mathématiques. Dit symposium werd gehouden van 27 augustus tot en met 8 september 1962 te Budapest. Vertegenwoordigers van de volgende landen waren aanwezig: Australië, België, Denemarken, Engeland, Frankrijk, Hongarije, Italië, Japan, Nederland, Polen, Roemenië, Rusland, Tsjechoslowakije, Verenigde Staten van Amerika, Zweden en Zwitserland. Hongarije, Polen, Roemenië, Rusland en Tsjechoslowakije waren vertegenwoordigd door totaal 11 afgevaardigden. Het totaal aantal afgevaardigden van de andere landen bedroeg 13. Ondergetekende was uitgenodigd als vertegenwoordiger van Nederland.

Als voorzitter werd gekozen G. Hajós van de Universiteit Eötvös Loránd te Budapest en tot vice-voorzitters: Y. Akizuki van de Pedagogische Universiteit te Tokyo, R.S. Tcherkasov van het Lenin-Instituut voor Pedagogiek te Moskou, Madame A. S. Krygowska van de Ecole Normale Supérieure te Krakovich en M. H. Stone van de Universiteit van Chicago. Tot algemeen rapporteur werd benoemd M. W. Servais uit België.

De discussies die 12 dagen lang 's morgens van 9—12,30 en 's middags van 16—18,30 gehouden werden betroffen de volgende onderwerpen:

I. Problemen t.a.v. de leerstof.
II. Problemen t.a.v. het leerproces.
III. Problemen t.a.v. opleiding en herscholing van leerkrachten.

Het is voor een goed begrip van het volgende nodig, dat men in gedachten houdt dat in alle socialistische landen en ook in vele andere, het voortgezet onderwijs na de lagere school met deze een eenheid vormt: een 11 of 12 jarige school. Een differentiatie na de eerste zes klassen in diverse scholen zoals in Nederland, kent men dan niet.

Op het ogenblik bestaat in de socialistische landen een leerplicht voor 6—14 jarigen, zodat een „normale" leerling 8 klassen van de eenheidsschool doorlopen kan hebben gedurende zijn leerplichtige leeftijd. Men streeft er echter naar de leerplicht uit te breiden tot 17/18 jaar. Het is meestal zo, dat in de eerste vier klassen alle vakken door één leerkracht worden gegeven. Na de vierde klas maakt men een begin met het systeem van vakleraren.

Bij deze gedachtengang valt het begin van het wiskundeonderwijs niet na de lagere school, maar reeds in de eerste klasse van de eenheidsschool, waar een begin wordt gemaakt met het onderwijs in rekenen. Deze opvatting dat het rekenonderwijs in de lagere klassen de basis van het wiskundeonderwijs behoort te zijn, bleek op dit Symposium algemeen gehuldigd te worden. Hieruit wordt het begrijpelijk dat men aan de wiskundige vorming van de leerkrachten, die het rekenonderwijs in de aanvangsklassen verzorgen, hoge eisen meent te moeten stellen.

Het Symposium was van oordeel, dat daar tegenwoordig de wiskunde een wezenlijk en onmisbaar fundament vormt van de samenleving, zoals blijkt uit het feit dat de wiskunde manifest is in de meest uiteenlopende vormen van menselijke activiteit, men de grondideeën ervan aan *alle kinderen* moet onderwijzen, mits echter in een voor hen bruikbare vorm. Men legde er de nadruk op dat reeds bewezen is, dat het contact tussen kinderen en wiskunde aanmerkelijk wordt begunstigd als men vanaf het eerste begin hun die aanbiedt in de moderne vorm.

Wat het doel van het wiskundeonderwijs aangaat, werd men het erover eens dat het de leerlingen moet brengen tot:
1. het zich eigen maken van wiskundige structuren,
2. het zich bewust maken van de daarin geldende relaties,
3. het kunnen uitdrukken van deze eigenschappen op verschillende manieren (schema's, gewone taal, symbolische notaties),
4. het herkennen en vaststellen van de logische verbindingen tussen deze relaties,

5. het opbouwen van deductieve systemen uit deze structuren,
6. het oplossen van wiskundige problemen,
7. het gebruiken van deze structuren als wiskundige modellen van concrete situaties,
8. het oefenen van de scheppende fantasie in het gebied van de wiskunde.

Na deze algemene inleiding volgt hieronder een overzicht van de voornaamste conclusies die betrekking hebben op de leerstof, het leerproces en de opleiding van leerkrachten.

I. De Leerstof.

Het is van belang om zo spoedig als dit mogelijk blijkt de basisbegrippen van de wiskunde aan alle kinderen te onderwijzen. De praktische uitvoerbaarheid daarvan wordt naar men meent bewezen door de talrijke ervaringen, waarbij is gebleken dat het mogelijk is de taal, de begrippen en de operaties van de elementaire verzamelingsleer te gebruiken, evenals de begrippen relatie en functie bij leerlingen vanaf 12 jaar. Hetzelfde geldt voor de begrippen nodig voor een rationele behandeling van vectorruimten (translatie, vector, het begrip groep enz).

Men acht het wenselijk dat er voortgezet onderzoek zal plaats vinden over de mogelijkheden voor het onderwijs in verzamelingsleer, vectorruimten en verwante begrippen. Daarnaast meent men echter dat ook een onderzoek nodig is naar de mogelijkheden om de volgende onderwerpen bij het onderwijs te betrekken zoals:

elementaire topologie, elementaire meetkunde, begrippen uit de statistiek en waarschijnlijkheidsrekening, differentiaal- en integraalrekening en wiskundige logica.

Dit onderzoek zal zich moeten uitstrekken over verschillende leeftijds- en schooltypen.

Verder acht men een onderzoek gewenst naar de vraag in welke omvang de axiomatische methode kan worden ingevoerd als fundamenteel instrument van wetenschappelijk onderzoek, waardoor de polyvalentie van de wiskunde door veelvuldige praktische toepassingen in het volle licht kan worden geplaatst.

Men is van mening dat het voornaamste middel voor het uitvoeren van deze onderzoekingen bestaat in het op grote schaal inrichten van proefklassen, zowel bij het lagere als het voortgezet onderwijs.

Wil men echter voor het opstellen van nieuwe leerplans op korte termijn van de resultaten van deze experimenten gebruik kunnen maken, dan zal er een weg gevonden moeten worden om alle Leden-

Staten van de UNESCO er zo gefundeerd mogelijk van op de hoogte te stellen. Aan het eind van dit verslag vindt men de tekst van de resolutie, waarin de steun van de UNESCO wordt gevraagd om op korte termijn te komen tot de inrichting van een internationaal informatiecentrum op het gebied van de didactiek en methodiek van het wiskundeonderwijs.

II. Het Leerproces.

Door de aanwezigheid op het Symposium van de psychologen Dienes (Australië) en Skemp (Engeland), die beide tevens de wiskunde hebben beoefend, was het mogelijk om de bijdragen die de psychologie aan de methodiek en didactiek van het wiskundeonderwijs kan leveren, in beschouwing te nemen.

De discussies hadden tot resultaat, dat een nauwe samenwerking tussen wiskundeleerkrachten en psychologen met een reële kennis van moderne wiskundige begrippen en methoden sterk wordt aanbevolen.

Als eerste resultaten kunnen de volgende conclusies worden vermeld.

1. Het wiskundeonderwijs moet een beroep doen op de natuurlijke intelligentie van de leerlingen en zich niet beperken hun routinetechnieken bij te brengen, die snel vergeten worden en weinig geschikt zijn voor transfer of toepassing.

2. De persoonlijke activiteit van de leerling is onmisbaar om de bij hem potentieel aanwezige vermogens te ontwikkelen.

3. De efficiëntie van het leerproces wordt groter wanneer men de leerling in pedagogische situaties brengt, die hem vertrouwd zijn en hem toestaan zelf hun wiskundige structuur te ontdekken in een werktempo dat overeenstemt met zijn persoonlijk ritme.

4. De typische bouw van de wiskunde maakt het nodig, dat de situaties waarin de leerling wordt gebracht, zo gekozen worden, dat bij hem gaandeweg het structurele denken en een doeltreffende geestelijke dynamiek tot ontwikkeling komen.

T.a.v. de belangrijke rol die de motivatie speelt bij het leren van wiskunde, was men van mening dat er verschillende mogelijkheden nader onderzocht moeten worden, die zouden kunnen bijdragen tot het actief betrekken van de leerlingen in het leerproces zoals bijv.:

het spelelement, belangstelling voor interessante toepassingen, strijdlust opgewekt door problemen, persoonlijke voldoening bij het oplossen van problemen, wedstrijdelement (concoursen, olympiades), het bewust worden van het wiskundig denken, de historische ontwikkeling van dit denken, de rationele schoonheid van de wiskunde.

Al deze elementen hebben een affectief karakter en daarom wordt een nader onderzoek van de rol van het emotionele element bij het leren van wiskunde aanbevolen.

Een ander probleem dat bij deze discussies aan de orde kwam, was dat van de psychologie van de begripsvorming. Men was van mening dat onderscheid gemaakt moet worden tussen primaire en secondaire begrippen.

De eerste ontstaan min of meer spontaan tengevolge van concrete ervaringen, terwijl de laatste langs indirecte weg tot stand komen met behulp van reeds verworven begrippen.

Het aanvankelijke wiskundeonderwijs moet beginnen met het aanbrengen van primaire begrippen, die losgemaakt worden uit concrete of abstracte situaties, waarmee de leerling vertrouwd is. Deze situaties kunnen ontleend worden aan het dagelijkse leven, of aan materiaal dat daarvoor opzettelijk gemaakt is en dat geschikt is om er structuren aan te onderkennen.

Bij het vormen van secondaire begrippen spelen generalisatie, specialisatie, analyse en synthese een rol. Het verdient aanbeveling de psychologische aspecten van deze begripsdynamiek nader te onderzoeken.

Om tot een goed inzicht te komen van de wijze waarop wiskundige begrippen worden gevormd, zal nog veel psychologisch onderzoek nodig zijn. Dit is niet minder het geval als men de vraag stelt naar de psychologische achtergrond, waartegen zich het tot stand komen van een logische structuur afspeelt. Het is een gebied, waarover nog niets positiefs gezegd kan worden en men is bij de discussies dan ook niet verder gekomen dan het stellen van een reeks vragen, waaraan nog generaties van in de wiskunde geïnteresseerde psychologen de handen vol zullen hebben.

III. De Opleiding van leerkrachten.

Men was algemeen van oordeel dat iedere leerkracht zowel voor lager als voortgezet onderwijs als basisopleiding de volledige cursus van een complete school (dus 11—12-jarig in totaal) moet doorlopen hebben. Daarna volgt hun verdere opleiding. T.a.v. de onderwijzers stelde men als eis, dat hun verdere wiskundige vorming doordrongen moet zijn van een moderne geest, zodat ze de stof die ze zullen moeten onderwijzen, ook werkelijk beheersen.

De leerkrachten die bestemd zijn voor de bovenbouw (voortzetting van de lagere school) zullen een moderne gespecialiseerde wiskundeopleiding moeten ontvangen.

Indien deze opleiding plaatsvindt in twee etappen zijn degenen

die alleen de eerste etappe doorlopen, niet bestemd voor het onderwijs in de beide hoogste klassen. Degenen die ook de tweede etappe doorlopen zijn volledig bevoegd.

Het programma voor wiskunde zal voor de eerste etappe de volgende onderwerpen moeten omvatten:

A. Verzamelingsleer en logica,
Abstracte algebra,
Topologie,
Meetkunde (axiomatische behandeling met gebruik van vectorruimten en begrippen uit de algebra en topologie).
Analyse,
Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek,
Toegepaste wiskunde,
Geschiedenis van het wiskundig denken.

B. Studie van één of twee andere onderwerpen naar keuze uit de natuurkunde, scheikunde, biologie, wiskundige economie, psychologie.

De tweede etappe zal moeten omvatten:
Een diepere studie van fundamentele onderwerpen.
Een gespecialiseerde aanvulling bv. met differentiaalvergelijkingen zowel gewone als partiële.
Lineaire programmering.
Informatietheorie.
Speltheorie.
Getallentheorie e.d.

De wiskundige opleiding van volledig bevoegde leraren zal een minimum duur van vier jaar moeten hebben.

Naast deze wiskundige vorming acht men een pedagogische voorbereiding noodzakelijk, waarvan men de omvang als volgt meende te moeten vaststellen.

Iedere toekomstige leraar moet een pedagogische vorming ontvangen, die zich niet beperkt tot algemeenheden over methodiek, didactiek en geschiedenis van de opvoeding. Hij zal op de hoogte moeten worden gebracht met de psychologische ontwikkelingsgang van kind tot volwassene. Hij moet de kennis verwerven die hem in staat zal stellen om rekening te houden met de individuele verschillen tussen de kinderen, hun gedrag in een groep, en van de gunstige of ongunstige werking die van zijn eigen optreden in de klas kan uitgaan. Hij zal inzicht moeten krijgen in de psychologie van het denken, in het bijzonder van de processen die optreden bij het verwerven van kennis van moderne wiskunde en evenzo van de diverse mogelijkheden tot motivatie van de leerlingen en van de rol, die het

emotionele element speelt in het leerproces. Hij zal een open oog moeten hebben voor de vormen waarin het wiskundig denken zich bij jeugdige personen openbaart.

Voor zijn praktische vorming zal hij in een school moeten hospiteren onder leiding van ervaren docenten.

Maar boven alles zal zijn opleiding voor hem het uitzicht moeten openen op wetenschappelijk onderzoek op het gebied van didactiek en psycho-pedagogiek door hem problemen te leren zien en hem de beschikking te geven over methoden en materiële hulpmiddelen, waardoor deze kunnen worden opgelost.

Een probleem dat zich op het ogenblik in bijna alle landen voordoet in verband met het streven naar modernisering van het wiskundeonderwijs is de noodzaak om een groter of kleiner deel van de thans in dienst zijnde leraren vertrouwd te maken met voor hen nieuwe wiskundige ideeën. De methoden die daartoe in diverse landen worden aangewend zijn o.a. regelmatige wekelijkse colleges, bijeenkomsten gedurende lange weekendscolleges, gedurende enige perioden verdeeld over het jaar. Voor dit doel moeten alle beschikbare bronnen worden aangeboord zoals Universiteiten, didactische of pedagogische centra, écoles normales, leraarsverenigingen enz.

Er moet op ruime schaal aan de leraren voorlichting worden gegeven over de hedendaagse wiskunde en het onderwijs daarin, door het publiceren van speciaal met dat doel geschreven boeken. Om de leraren te overtuigen van de noodzaak om hun kennis van de wiskunde op modern peil te brengen, moet men hun op objectieve wijze inzicht geven in het internationale karakter van het streven naar modernisering, de bijzondere positie die hun land daarbij inneemt, de noodzaak van een planmatige opzet, hun verantwoordelijkheid tegenover hun leerlingen en het wetenschappelijk belang van de nieuwe ideeën.

Dit alles is echter niet voldoende.

Men zal ook binnen de grenzen van het mogelijke hun aantal lesuren zo moeten vaststellen, dat zij gelegenheid krijgen voor een aanvullende studie en hun de daarvoor te maken onkosten vergoeden.

Om echter te voorkomen dat nog eens een situatie zal kunnen optreden, waarin het onderwijs te ver ten achter raakt bij de ontwikkeling van de maatschappij en de wetenschap, zullen in de toekomst de leraren in de wiskunde zich op de hoogte moeten kunnen houden van de ontwikkelingen in de wiskunde en de methodiek. Daarvoor is nodig dat er in ieder land instituten zijn, waar leraren door middel van stages een voortgezette vorming kunnen ontvangen. Deze continue vorming zal in de toekomst een noodzakelijk onderdeel van

hun werk moeten uitmaken.

Er is ook nog een discussie gewijd aan de oorzaken van het in alle landen bestaande tekort aan leerkrachten. Als één van de voornaamste oorzaken werd gezien de steeds toenemende aantallen leerlingen, mede tengevolge van het streven naar massascholing. Hiernaast werden ook andere oorzaken genoemd als onvoldoende maatschappelijk aanzien, te lage salariëring e.d. Aangezien de omstandigheden van land tot land verschillen is het moeilijk tot algemene uitspraken te komen.

Internationaal informatiecentrum.

Reeds in het begin van de discussies bleek hoe groot de behoefte aan een instantie is, die alle informatie op het gebied van de modernisering van het wiskundeonderwijs verzamelt, schift en ter beschikking van belanghebbenden stelt. Daarom werd door de Nederlandse afgevaardigde reeds op de tweede dag van het symposium een voorstel ingediend om aan de UNESCO to verzoeken een internationaal informatiecentrum in te richten. De vertegenwoordiger van de UNESCO was echter van mening, dat dit op grote bezwaren zou stuiten, omdat de UNESCO niet over de daarvoor benodigde deskundigen en administratieve apparaten beschikte. Deze moeilijkheid werd tenslotte opgelost door een voorstel van de Russische afgevaardigde, dat met algemene stemmen werd aangenomen. Hieronder volgt de Engelse tekst van deze resolutie.

The work of the symposium has again shown quite clearly how indispensable it is to distribute information on the various experiments among the member states of UNESCO in order to stimulate and coordinate research in mathematics teaching. It was felt that a stage has been reached when an organization should be sponsored to effect collaboration among various centres of research, devoted to pilot classes, textbooks, curriculum and teacher-training.

By a speedy circulation of such documents all States will be informed of the work and results obtained, within the shortest possible time and with an economy of effort and financial resources.

The participants of the Symposium emphatically request UNESCO to expedite the implementation of the resolutions adopted by the 19th International Conference on National Education in 1956 and to take steps to sponsor an international centre of information on pedagogy of mathematics.

H. Th. M. Leeman.

EEN UITBREIDING VAN VERSCHEIDENHEID XLIX

door

A. J. VAN DER WELLE

VLISSINGEN

In aansluiting op het artikel Verscheidenheden 49 van prof. dr. O. Bottema in het nummer van okt. 1961 zal hieronder een planimetrische oplossing gegeven worden van het volgende vraagstuk: Een aantal punten A, B, C....N liggen vast op een cirkel, waarop zich punt P beweegt. Gevraagd wordt de ligging van P te bepalen, wanneer

$$\alpha\overline{PA}+\beta\overline{PB}+\gamma\overline{PC}+\ldots\ldots$$

zo groot mogelijk is. Hierin zijn $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ gegeven reële getallen.

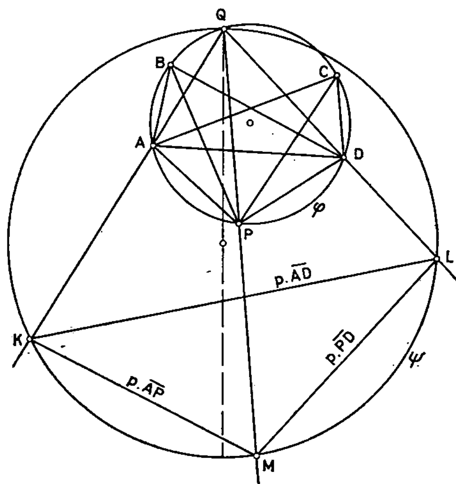


Fig. 1.

We voeren een berekening uit voor 4 punten A, B, C en D, gelegen op cirkel φ. Gevraagd wordt de ligging van P op φ, wanneer $\alpha\overline{PA}+\beta\overline{PB}+\gamma\overline{PC}+\delta\overline{PD}$ max. is. Zie de figuur.

Neem op φ, behalve P een punt Q aan en trek QA, QD, QP, alsmede BA, BD, CA en CD en PA, PB, PC en PD.

Pas op QA af $QK=\beta\overline{AB}+\gamma\overline{AC}+\delta\overline{AD}$ . . . . 1)

en op QD $\quad QL = \alpha\overline{DA} + \beta\overline{DB} + \gamma\overline{DC}$ . . . . 2)
Construeer de cirkel ψ door Q, K en L, deze snijdt QP nog in M. Trek KL, KM en ML.

Wegens gelijkvormigheid van ADP en KLM stellen we
$KL = p.\overline{AD}$, $ML = p.\overline{PD}$ en $KM = p.\overline{AP}$. . . . . 3)

Nu is: $AD \times PC = AC \times PD + AP \times CD$ . . . . 4)
$AD \times PB = AB \times PD + AP \times BD$ . . . . 5)
$KL \times QM = QL \times KM + KQ \times ML$ . . . . 6)

Uit 1), 2), 3) en 6) volgt:

$$QM \times p.\overline{AD}$$
$$= (\alpha\overline{DA} + \beta\overline{DB} + \gamma\overline{DC}).p.\overline{AP} + (\beta\overline{AB} + \gamma\overline{AC} + \delta\overline{AD}).p.\overline{PD}$$

Delen door p:

$$QM \times \overline{AD} = \alpha\overline{DA}.\overline{AP} + \beta\overline{DB}.\overline{AP} + \gamma\overline{DC}.\overline{AP} + \beta\overline{AB}.\overline{PD} + \gamma\overline{AC}.\overline{PD} + \delta\overline{AD}.\overline{PD} \quad 7)$$

Beide leden van 5) vermenigvuldigen met β en van 4) met γ:

$$\beta\overline{AD}.\overline{PB} = \beta\overline{AB}.\overline{PD} + \beta\overline{AP}.\overline{BD}$$

$\gamma\overline{AD}.\overline{PC} = \gamma\overline{AC}.\overline{PD} + \gamma\overline{AP}.\overline{CD}$, waardoor 7) overgaat in

$$QM \times \overline{AD} = \alpha.\overline{AD}.\overline{AP} + \delta\overline{AD}.\overline{PD} + \beta\overline{AD}.\overline{PB} + \gamma\overline{AD}.\overline{PC}.$$

Na deling door AD:

$$QM = \alpha\overline{PA} + \beta\overline{PB} + \gamma\overline{PC} + \delta\overline{PD}$$

We hebben dus aangetoond dat, wanneer P de cirkel φ doorloopt, M de cirkel ψ doorloopt.

Het is duidelijk dat de grootste waarde van QM optreedt, wanneer QM door het middelpunt van cirkel ψ gaat, waarmee de gevraagde ligging van P gevonden is.

Wanneer men stelt, dat PX ($X = A, B, C \ldots\ldots$) van teken verandert, als het punt X door P wordt gepasseerd, „voldoet" de gehele cirkel ψ en is de grafiek van QM een sinuslijn.

Anders ligt de zaak, wanneer van geen tekenwisseling sprake is, zoals prof. Bottema stelt. Liggen er n vaste punten op φ, dan bestaat de grafiek van QM in dit geval uit n (delen van) sinuslijnen. Zowel in de knikken als in de n intervallen daartussen kan nu een uiterste waarde liggen.

DE HOEK TUSSEN EEN LIJN EN DE X-AS

door

Dr. D. Kijne
DELFT

Het zijn soms kleinigheden waarover men een andere opvatting huldigt dan de algemeen gangbare, zodat het niet de moeite waard schijnt, om ervan gewag te maken. Wanneer dan later toch blijkt, dat het goed kan zijn, de argumenten voor zo'n afwijkende mening publiek te maken, ontstaat er een kleine notitie als de onderhavige.

In het bekende Verslag van de Nomenclatuurcommissie (Euclides, 35-II van 1 oktober 1959) wordt ook het begrip (als „verplichte term") vermeld van „de hoek die de lijn l met de X-as maakt", een begrip dat niet erg veel gebruikt wordt, maar dat toch ter volledigheid aanwezig moet zijn; de tangens van deze hoek is het belangrijkste, en daarover zijn geen verschillen van inzicht. Zowel bij de analytische meetkunde als bij de differentiaalrekening komt het te pas. Het gaat nu om de volgende („klassieke") formulering:
Onder de hoek die een lijn l met de X-as maakt, verstaan we de hoek φ, waarover men de X-as om het snijpunt van l met deze as in positieve richting moet draaien om hem in l te doen overgaan ($0° \leqq \varphi < 180°$).

Dit is nu de „kleinigheid", naar aanleiding waarvan indertijd een korte gedachtenwisseling ontstond; als gevolg daarvan heeft de Nomenclatuurcommissie deze definitie gewijzigd (Euclides, 35-IV van 1 maart 1960) in: De hoek die een lijn maakt met de X-as, wordt gemeten van $-90°$ tot en met $90°$.

De argumenten hiervoor mogen hier nog eens uiteengezet worden.

De lijn l en de X-as zijn twee lijnen, die vier hoeken insluiten, welke dan weer twee aan twee even groot zijn. Om nu tot een ondubbelzinnige keuze te komen wordt de op X-as een positieve richting aangenomen, hetgeen het gemakkelijkst gaat, wanneer men vectoren tot zijn beschikking heeft. (Immers, we beschouwen de lijn toch als drager van twee richtingen, onderling tegengesteld, en we moeten niet meer praten van „de" richting van een lijn. Ook uitdrukkingen als „evenwijdige lijnen hebben *de*zelfde richting" zijn onjuist.)

Hoewel we dus (uit luiheid) vaak zeggen: de hoek tussen l en de

X-as, bedoelen we de hoek tussen l en de positieve richting van de X-as. Zodoende zijn van de vier reeds twee mogelijkheden geëlimineerd. Nu zal dan voortaan deze hoek voor een lijn l die niet loodrecht op en niet evenwijdig aan de X-as is, worden gedefinieerd als *de kleinste hoek waarover we (een vector met de richting van) de positieve richting van de X-as moeten draaien, opdat deze samenvalle of evenwijdig lope met de lijn l; is nu de draairichting positief, dan noemen we de hoek positief, en is de draairichting negatief, dan noemen we de hoek ook negatief.* Is l loodrecht op de X-as, dan noemen we de hoek 90° of $\frac{1}{2}\pi$, en is l evenwijdig met de X-as, dan noemen we de hoek 0° of 0.

Men heeft dus steeds: $-90° < \varphi \leqq 90°$.

De voordelen aan deze wijze van spreken verbonden zijn:
Is de richtingscoëfficiënt van l positief, resp. negatief, dan ook de bijbehorende hoek tussen l en de X-as, waarvan immers de richtingscoëfficiënt de tangens is; de discontinuïteit in de hoek, bij draaiing van l, bevindt zich nu niet meer bij de horizontale stand, doch bij de verticale; dit is de stand waarbij ook de tangens (de „m") niet bestaat, discontinu is. Let men eens op de differentiaalrekening: bij de horizontale stand van de raaklijn aan een grafiek van een functie is de afgeleide continu: deze afgeleide is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, d.i. de tangens van de hoek , die de raaklijn maakt met de (positieve richting van de) X-as. Deze hoek wordt nu ook continu.

Bij een positieve afgeleide een positieve tangens en een positieve „hoek", en bij een negatieve afgeleide een negatieve tangens en een negatieve „hoek", met de continuïteit bij 0.

BOEKBESPREKING

Prof. Dr. Hans Freudenthal, *Exacte logica*, V.U.B., tweede reeks, nr. 67, Erven F. Bohn N.V., Haarlem, 117 blz., geb. f. 8.—.

Aan een gemakkelijk te begrijpen en toch wetenschappelijk verantwoorde inleiding in de mathematische logica bestond in ons land stellig behoefte. We mogen Prof. Freudenthal dan ook dankbaar zijn, dat hij de Nederlandse literatuur met een dergelijk werk verrijkt heeft. In de eerste drie hoofdstukken, waarin achtereenvolgens de verzamelingen en afbeeldingen, de proposities en subject en predikaat behandeld worden, wordt de lezer ingeleid in de problemen van de moderne logica. Deze hoofdstukken hebben nog geenszins de pretentie een exacte fundering van de mathematische logica te leveren; de lezer wordt voorlopig alleen vertrouwd gemaakt met de betekenis van de fundamentele logische begrippen. De schrijver is hiermee niet tevreden; een inleiding waarin geen enkel stringent bewijs geleverd kan worden, is didactisch van hoge waarde, maar als er geen systematische opbouw op volgt, is haar wetenschappelijke waarde gering. De schrijver heeft zich gelukkig

niet willen beperken tot het vervaardigen van een populair wetenschappelijk geschrift en heeft daarom in het vierde hoofdstuk een wetenschappelijke fundering gegeven van de in de vorige hoofdstukken verkregen logische kennis. In dit hoofdstuk wordt daardoor van de lezer een grotere concentratie vereist dan in de eerste drie hoofdstukken.Hetzelfde geldt voor het slothoofdstuk, waarin taal en metataal behandeld worden. De auteur zegt zelf, dat dit hoofdstuk met de Franse slag geschreven is. Ik ben het daar niet mee eens. In dit hoofdstuk worden wijdere perspectieven geopend, waardoor de lezer inziet, dat in de mathematische logica talrijke belangrijke problemen verscholen zijn, die uitgaan boven het doel een formalisering te geven van de wiskundige taal. Met name worden hier de paradox van Löwenheim-Skolem en de onvolledigheidsstelling van Gödel besproken.

Hoewel ik een grote waardering heb voor het werk als geheel, wil ik in deze recensie toch kritisch ingaan op één punt, dat weliswaar eigenlijk van ondergeschikt belang is, maar in direct verband staat met de schoolwiskunde. De schrijver maakt bezwaar tegen de gangbare functienotaties, w.o. de notatie $ax^2 + bx + c$. ,,Men bedoelt, dat dit een functie van x is. Waarom? Waarom niet van a, b of c of van allemaal?" (pag. 70). Ik zou hierop willen antwoorden:

voor elke a, b en c geldt: bij elke x bestaat één y zo, dat $ax^2 + bx + c = y$.

En dus is voor elke a, b en c $ax^2 + bx + c$ een functie van x. Analoog is deze vorm voor elke a, b en x een functie van c, enz. en zelfs voor elke a, b, c en x een (constante) functie van b.v. z. Nu kan een wiskundige, als hij opschrijft $ax^2 + bx + c$, daarbij een bepaalde gedachte hebben, b.v. de gedachte dat dit een functie van x is. De auteur laat hem deze gedachte dan tot uitdrukking brengen door de notatie $\Psi_x\ (ax^2 + bx + c)$. Deze Ψ_x is dan geen mathematisch symbool, maar weergave van de subjectieve bedoeling van de betrokken wiskundige. Als zodanig is ze voor het begrijpen van de tekst gemakkelijk, maar ze is overbodig voor de formalisatie van de wetenschap. Mogelijk kan deze opmerking tot een verdere discussie aanleiding geven. [1])

Samenvattend wil ik besluiten met de opmerking, dat het boek sterk aan te bevelen is aan iedere leraar, die zich op het gebied van de formele logica niet thuis voelt en die er prijs op stelt met zijn tijd mee te gaan. En ook degeen, die zich op dit gebied wel thuis voelt, zal er zijn kennis mee kunnen verfrissen en aanvullen. Een flink aantal vraagstukken maakt het mogelijk de stof goed in zich op te nemen.

P. G. J. Vredenduin

Dr. L. Kuipers, *Leerboek der Analyse* II, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1962, 195 blz., ing. *f* 19.50, geb. *f* 22.50.

Het boek is bedoeld voor degenen, die studeren voor m.o.B.

In de eerste hoofdstukken worden de functies van twee variabelen besproken. Na een korte topologische inleiding komen de begrippen limiet en continuïteit ter sprake; deze worden op de klassieke manier gedefinieerd. Daarna komt uiteraard

---

[1]) De schrijver heeft eigenlijk nog een iets andere bedoeling. Bij hem is Ψ_x wel een logisch symbool. Daardoor moet het gebruik ervan vastgesteld worden door regels daarvoor op te geven. Als regel vinden we nu

$$(\Psi_x\, f(x))\ (a) = f(a)$$

(pag. 72). Maar nu treden Ψ_x en $f(x)$ beide op, hetgeen een m.i. nodeloze verdubbeling van de symboliek met zich meebrengt.

de differentiaalrekening aan de orde. Hierop volgen de integralen van functies met een parameter en de herhaalde integralen, waarna het mogelijk wordt de Γ-functie en de β-functie te behandelen. Tenslotte wordt kort en overzichtelijk het wezenlijke behandeld van inverse en impliciete functies. In het derde hoofdstuk wordt de theorie van de functies van twee variabelen gegeneraliseerd tot die van functies met meer dan twee variabelen. Hierna volgen de gebiedsintegralen, waarbij ook het verband tussen gebiedsintegralen en herhaalde integralen duidelijk gemaakt wordt. Het laatste hoofdstuk is gewijd aan gewone differentiaalvergelijkingen, terwijl in enkele bladzijden nog even iets gezegd wordt over partiële differentiaalvergelijkingen.

Er wordt wel eens over geklaagd, dat de student voor m.o.B zo weinig in contact komt met moderne behandelingswijzen. In overeenstemming hiermee is, dat in dit boek weinig te merken is van modernisering van de wiskunde. Deze opmerking is niet als verwijt bedoeld, doch slechts als constatering. Ik zou zelf niet weten, hoe men het anders zou kunnen doen, en bovendien dient een boek aangepast te zijn aan het doel, dat de auteur zich stelt. De behandelingswijze is helder en zorgvuldig. Hierdoor en door de ruime hoeveelheid vraagstukken is het een waardevolle aanwinst in de rij van de Nederlandse studieboeken. Toch zou ik ook een enkele aanmerking willen maken. In de eerste twee hoofdstukken had ik gaarne de inhoud en het bewijs van de stellingen toegelicht gezien door eenvoudige figuren. Juist studerenden zullen zich daardoor de betekenis van de eigenschappen gemakkelijker eigen maken. Maar misschien is de auteur het hier principieel niet mee eens.

P. G. J. Vredenduin

Robert Ineichen, *Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Räber Verlag, Luzern, 1962, 101 blz., Kart. Fr./DM 8,80.

Dit boek is een schoolboek, dat het resultaat is van een serie proefnemingen met onderwijs in de statistiek op middelbare scholen in Zwitserland. De nieuwsgierigheid van de lezer zal er dus in eerste instantie naar uitgaan, wat men behandeld heeft en op welke wijze.

In het eerste hoofdstuk wordt de leerling ingewijd in enige grondbegrippen van de beschrijvende statistiek, zoals histogram, gemiddelde en spreiding. Daarna komt de mathematische statistiek aan de orde, d.w.z. in hoofdzaak de waarschijnlijkheidsrekening. Hier treft ons een bijzonder fraaie opzet. Het kansbegrip wordt niet op de klassieke manier ingeleid, maar als experimentele grootheid gedefinieerd. Kans is waargenomen relatieve frequentie. Als bijzonder geval hiervan zien we de alleen op speciale gevallen van toepassing zijnde definitie met behulp van gunstige en mogelijke gevallen optreden. Als men zich als doel stelt de leerling inzicht in statistische begrippen bij te brengen, lijkt het mij toe, dat de gevolgde weg een uitstekende en snelle voorbereiding is om tot dit doel te geraken. Men zal er nu gemakkelijk toe komen zich niet al te zeer te concentreren op de problemen van de combinatoriek. Door te veel aandacht aan deze problemen te besteden wordt de kansrekening wel eens tot een ,,waterhoofd'' van de statistiek. Minder geslaagd vind ik, dat de formules voor aantallen variaties, permutaties en combinaties uit de regels van de kansrekening worden afgeleid. Daarna komen de binomiale verdelingen met afleiding van de formules voor de mathematische verwachting en de spreiding aan de orde, en ook de wet van de grote getallen. In een slothoofdstuk wordt zo goed en zo kwaad als dat mogelijk is, de normale verdeling behandeld.

Jammer is, dat men aan de eigenlijke statistiek op deze manier nauwelijks toekomt. Op de laatste bladzijde van het boek wordt voor het eerst gesproken over het toetsen van een hypothese.

Zou het geen aanbeveling verdienen behandeling van de beschrijvende statistiek achterwege te laten en de vrijgekomen tijd te benutten door wat nader in te gaan op de eigenlijke statistische problemen?

Het boek is met veel zorg geschreven. De voorbeelden zijn goed en gevarieerd gekozen. Er staan zeer weinig vraagstukken in. Het zou interessant zijn te vernemen, of gebleken is, dat men zonder vraagstukken te laten maken de leerlingen een voldoende inzicht in de behandelde stof bij kan brengen.

P. G. J. Vredenduin

H. Schwerdtfeger, *Introduction to linear Algebra and the theory of Matrices*, 2e druk. Uitgeversmij. P. Noordhoff N.V., Groningen 1962, 285 blz., prijs ing. *f* 18.—, geb. *f* 21.—

Dit boek is het resultaat van colleges, gegeven aan de universiteit van Adelaide (Australië) voor studenten in de wiskunde e.a., die geen andere vooropleiding hadden, dan middelbaar onderwijs.

Behandeld worden: systemen van lineaire vergelijkingen, lineaire homogene transformaties, rationele operaties op matrices, equivalentie, bilineaire en kwadratische vormen, groepen en matrices en tenslotte een projectieve theorie over nulsystemen.

Voor hen, die nog geen kennis maakten met lineaire vectorruimten (schrijver spreekt over puntruimten), determinanten, matrixalgebra, permutatie- en groepentheorie, is een boekje als: A. Heyting: Matrices en Determinanten (Servire's Encyclopaedie) wel een dankbaar aanvullend bezit. Een werkcollege, naast dit boek van S. lijkt me geen overbodige luxe. Het aantal bij elk hoofdstuk opgenomen vraagstukken is m.i. te klein.

De notaties zijn kort en efficiënt; deze economie in de notatie vergt echter de nodige concentratie.

De typografische verzorging is uitstekend. Voor belangstellenden gaarne aanbevolen.

Burgers

Wiskunde in de 20e eeuw, 1, Internationale perfectioneringscursussen voor doctoren en licentiaten in de wiskunde; eerste jaar, Brussel, 25—31 augustus 1960, 326 blz.

Dit boek is niet in de handel, maar wordt wel verkocht door het Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur, Dienst verkoop van publikaties, Etterbeekse steenweg, Brussel. De prijs bedraagt 75 BF.

In Euclides 36, p. 289 heeft u een verslag kunnen lezen van de hand van Brandenburg en Thijsse van de eerste ,,vervolmakingscursus", die in 1960 te Brussel gehouden is. De inhoud van deze cursus is thans in boekvorm verschenen.

Het boek bevat een veelheid van artikelen op verschillend gebied, die de lezer een indruk geven van de veranderingen, die zich in de laatste decennia in de wiskunde voltrokken hebben. Om te beginnen vindt men enige artikelen, die betrekking hebben op de grondslagen van de wiskunde. A. Borgers behandelt in ,,Over axio-

matische wiskunde en symbolische logica" de oorzaken, die geleid hebben tot het ontstaan van de symbolische logica en de grondprincipes van deze logica. Een uitwerking van enige van deze principes vindt men in E.W. Beth, „Inferentiële logica en tweewaardige implicatie-logica". In dit artikel geeft de schrijver een uiteenzetting van de door hem gevonden methode door middel van tableaus resultaten in het gebied van de propositielogica te bereiken (vgl. ook het artikel van Beth in Euclides 34, p. 257). A. Borgers zet uiteen in „Over de verzamelingsleer" op welke wijze deze tak van de wiskunde een centrale plaats in het wiskundig denken veroverd heeft. Hij wijst op de paradoxen, die uit deze leer zijn voortgekomen en behandelt de pogingen, die gedaan zijn om deze paradoxen te ontwijken. Hierbij sluit G. Papy aan in „Het universum van de verzamelingsleer". Men vindt hierin een en ander over verzamelingen, relaties, afbeeldingen en een poging de paradoxen te ontwijken door het begrip verzameling in te perken en onderscheid te maken tussen verzamelingen en klassen. (Deze poging doet mij altijd denken aan een bestrijder van wintertenen, die eenvoudig definieerde, dat wintertenen niet langer tenen, doch voetextremiteiten heten. Maar ja, de jeuk blijft en de paradoxen verdwijnen. Het zal dus wel niet helemaal analoog zijn.)

P. J. van Albada behandelt in „Symmetrische algebra's", getalsystemen, die men zo ongeveer kan karakteriseren door de eis, dat elk getal een geconjugeerde heeft. Uitgaande van de reële getallen vindt hij een serie uitbreidingen, die steeds armer aan eigenschappen worden. F. van der Blij zet in een gelijknamig artikel de betekenis uiteen van enkele moderne begrippen van de analyse, t.w. onder meer groep, topologische groep, ring, lichaam, lineaire ruimte. Hirsch geeft in een vijftigtal pagina's een meesterlijke uiteenzetting van het integraalbegrip, waarbij hij de verschillende integraaldefinities met behulp van moderne methoden vergelijkt. Men krijgt hier wel een zeer heldere kijk op de vruchtbaarheid van de huidige wiskundige methoden.

Op het gebied van de meetkunde vinden we drie bijdragen. Twee daarvan van de hand van Libois over „Homogene ruimten" resp. „Niet-homogene ruimten," geven enig inzicht over de wijze waarop men tot verschillende meetkunden kan komen. Doordat de opzet erg schematisch is, is het betoog, althans voor mij, moeilijk te volgen. P. J. van Albada behandelt in „Projectieve vlakken" de wijze, waarop men in de projectieve meetkunde coördinaten kan invoeren en kan rekenen, als men de stelling van Desargues aanvaardt en de verarming, die het systeem ondergaat, als men deze stelling laat vallen, resp. verzwakt.

Tenslotte vinden we nog twee publikaties over onderwerpen uit de mechanica van A. Deprit, een over een statistisch onderwerp van J. Teghem en een didactische beschouwing van P. M. van Hiele.

Al met al een schat van wetenswaardigheden voor zeer lage prijs. Met spanning zie ik deel 2 tegemoet.

P. G. J. Vredenduin

WIMECOS

ALGEMENE VERGADERING op *vrijdag 28 december 1962* in *„Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht*. Aanvang 10,30 uur. Voor de voorlopige agenda zie men het novembernummer (blz. 92).

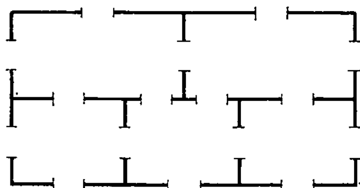
CONTRIBUTIE

De penningmeester verzoekt de leden die hun contributie over 1962/63 (ingegaan 1 sept. j.l.) nog niet hebben voldaan, *f* 8,00 te willen overschrijven op postrekening 143917 t.n.v. Wimecos, Amsterdam.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

79. In onderstaande figuur zijn enige vertrekken getekend, die alle door deuren verbonden zijn. Er wordt gevraagd:



a. Een zodanige wandeling te maken door de vertrekken en buitenom, dat men elke deur precies één keer passeert. Begin- en eindpunt van de wandeling behoeven niet samen te vallen.

b. Een zodanige gesloten wandeling te maken door de vertrekken en buitenom, dat men zoveel mogelijk deuren passeert en geen enkele deur twee maal passeert.

80. Deze opgave is niet zo zeer bestemd voor de leraren zelf als wel voor het opgeven aan de klasse: Als men in $a^2 + a + 41$ voor a substitueert 1, dan krijgt men als uitkomst een priemgetal. Hetzelfde geldt als men voor a substitueert 2. Ga zo verder en als je overtuigd bent geraakt, dat er altijd een priemgetal komt, probeer het dan eens te bewijzen.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

77. Als we van a aftrekken $\frac{1}{2}$ en daarna nog $\frac{1}{3}$ deel van het verschil, krijgen we $\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}$. Herhalen we de bewerking nog driemaal, dan krijgen we $b = \frac{16}{81}a - \frac{65}{81}$.

Dus is $16a - 81b = 65$. Hieruit volgt: $a = 80 + 81t$ en $b = 15 + 16t$. Deel nu $15 + 16t$ op $80 + 81t$. Noem het quotiënt q en de rest r. Dan is dus $q \geqq 5$ en volgens de opgave weer $r = 80 + 81u$. Dus is

$$(15 + 16t)q + 80 + 81u = 80 + 81t,$$

$$t = \frac{81u + 15q}{81 - 16q}.$$

Hieruit volgt $q \leqq 5$. Dus moet $q = 5$. Dan is $t = 81u + 75$. Dus is t minimaal gelijk aan 75. Voor het minimum van a vinden we dan $a = 80 + 81 \cdot 75 = 6155$.

78. In onderstaande figuur zijn de punten K en L zo getekend, dat $FK = EP_3$ en $BL = AP_1$. De lijn KL ontstaat dan uit de lijn P_1P_3 door deze 60° te roteren om het middelpunt van de zeshoek. Verder is nu $BP_2 \parallel KL$. Hieruit volgt, dat $\angle P_2SP_3 = 60°$. De constructie van de zeshoek kan dus als volgt geschieden. Trek door P_2 een lijn, die een hoek van 60° met P_1P_3 maakt. Zet hierop een lijnstuk af, dat gelijk is aan P_1P_3. Men heeft nu punt B en kan dan de rechte lijnen AB en DE trekken. Projecteer P_1 op ED en men vindt gemakkelijk de lengte van AP_1. De rest gaat vanzelf.

